Električna mjerenja

(pomoćni materijal za predavanja)

Univerzitet Crne Gore

Elektrotehnički fakultet

Mjerna nesigurnost tipa A i B

Mjerna nesigurnost

- **Kao što smo ranije napomenuli tačna vrijednost greške gotovo nikada nije poznata, zato što mjerena vrijednost nikada nije tačna vrijednost već samo procijenjena vrijednost.**
- Ova procijenjena vrijednost mjerene veličine (rezultat mjerenja) uvjek se nalazi u nekom opsegu oko tačne vrijednosti, pri čemu širina tog opsega odgovara **mjernoj nesigurnosti**.
- Procijenjena vrijednost mjerene veličine i mjerna nesigurnost daju kompletnu informaciju o tačnosti mjerenja.
- **Rezultat mjerenja: procijenjena vrijednost mjerene veličine ± mjerna nesigurnost**

$$\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$$

uz napomenu o vjerovatnoći (ili faktoru proširenja).

- U teoriji grešaka, do pojave standardnog **Vodiča o mjernoj nesigurnosti** (Guide to the Expression of Uncertainty of Measurements, GUM), posebno su razmatrane sitematske i slučajne greške mjerenja. Danas umjesto teorije grešaka aktuelna je jedinstvena teorija o nesigurnosti rezultata mjerenja.

Mjerna nesigurnost

- Za procjenu mjerne nesigurnosti koriste se statističke metode i metode teorije verovatnoće koje su već ranije prikazane.
- **Mjerna nesigurnost** je procjena širine intervala u okviru koga se nalazi mjerena veličina sa određenom vjerovatnoćom:
  - proizvođač za otpornik od 560 kΩ garantuje: otpornost je 560 kΩ sa tolerancijom od 5% (28 kΩ), odnosno otpornost je 560 ± 28 kΩ.
- **Mjerna nesigurnost** se pridružuje rezultatu mjerenja i karakteriše rasipanje vrijednosti oko procijenjene (srednje) vrijednosti mjerene veličine.
- Mjerna nesigurnost može biti na primjer **standardna devijacija ili interval** koji ima izražen nivo sigurnosti.

- **Razlikuju se dva tipa mjerne nesigurnosti**:
  - **komponenta nesigurnosti tipa A**, $\boldsymbol{uAx}$, koja se pojavljuje usljed **slučajnih grešaka**, i zasniva se na statističkoj analizi serije ponovljenih merenja
  - **komponenta nesigurnosti tipa B**, $\boldsymbol{uBx}$ koja se pojavljuje usled **sistematskih grešaka** i zasniva se na svemu ostalom osim direktne statističke analize serije ponovljenih mjerenja

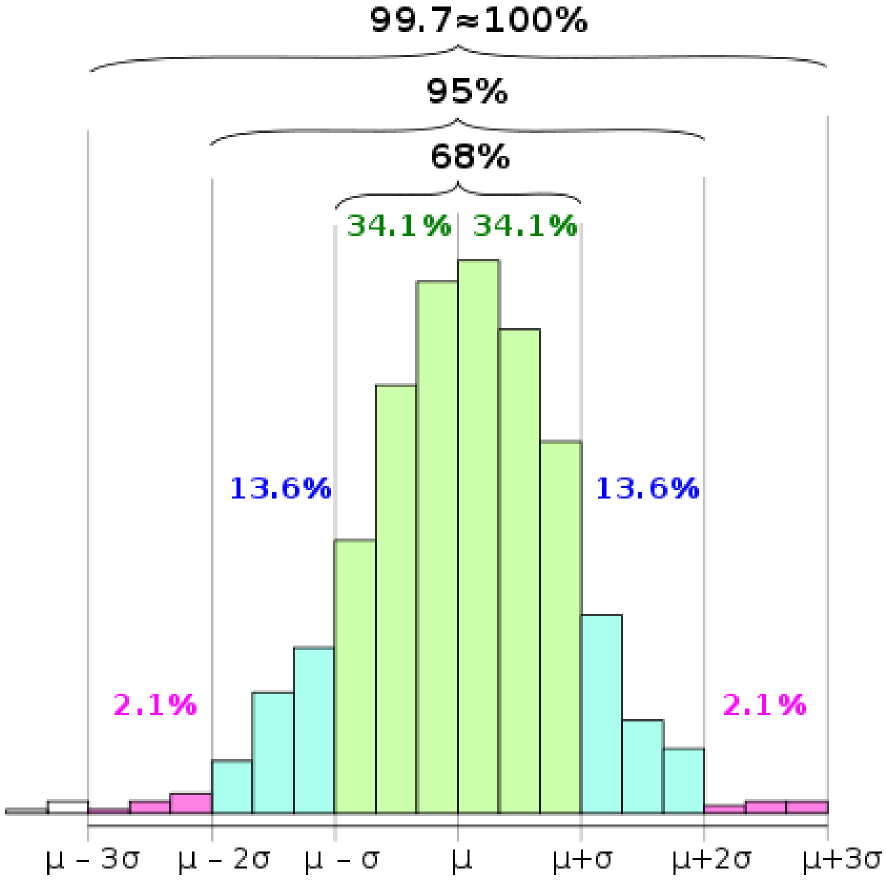
Mjerna nesigurnost tipa A

- Procjena mjerne nesigurnosti – tip A zasniva se na statističkoj obradi rezultata ponovljenih mjerenja.
  - ako se predstavlja mjerna nesigurnost pojedinačnog mjerenja tada je mjerna nesigurnost tipa A jednaka standardnom odstupanju pojedinih rezultata mjerenja
  - ako se rezultat predstavlja kao srednja vrednost rezultata merenja, onda je mjerna nesigurnost jednaka standardnom odstupanju srednje vrednosti.
- Najčešća je pretpostavka da je raspodjela rezultata mjerenja Gausova (ne mora da bude). Na osnovu rezultata mjerenja određuje se srednja vrijednost $\boldsymbol{x}$ koja predstavlja procjenu mjerene veličine.
- U tom slučaju standardna mjerna nesigurnost je eksperimentalno standardno odstupanje srednje vrijednosti:

$$u_A(\overline{x}) = s_{\overline{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

Mjerna nesigurnost tipa A za Gausovu funkciju gustine verovatnoće

- Najčešći slučaj u realnim aplikacijama je Gausova funkcija gustine verovatnoće. Sve vrijednosti (mjerenja) su u tom slučaju raspoređeni oko srednje vrijednosti.
- Verovatnoća pojavljivanja vrijednosti koje se nalaze relativno bliže procenjenoj srednjoj vrednosti je veća od onih koje se nalaze relativno blizu ekstremuma funkcije gustine verovatnoće.
- Ovako definisanoj mjernoj nesigurnosti – standardnoj mjernoj nesigurnosti, odgovara vjerovatnoća od oko 68% . Ukoliko se zahtijeva vjerovatnoća od oko 95% (što odgovara 2σ) računa se proširena mjerna nesigurnost s faktorom proširenja 2. Za faktor proširenja 3, verovatnoća je 99.7%



$$\mu = \overline{x},\ srednja\,vr.$$

$$\sigma = u_A(x) = s_{\overline{x}} \quad st.\ dev.$$

Vrste funkcija *f*(*x*)

- Jedna od osnovnih postavki u GUM-u je da se svakom podatku o mjernoj nesigurnosti pridruži i neka **funkcija raspodjele vjerovatnoća** koja odgovara tom podatku. Pri određivanju mjerne nesigurnosti, najčešće se koriste sljedeće raspodjele:
  - Gausova raspodjela,
  - Studentova raspodjela,
  - Ravnomjerna raspodjela,
  - Trougaona raspodjela.
- Svaka funkcija gustine vjerovatnoće mora da ispunjava uslov normiranosti, odnosno da je integral u neograničenom intervalu funkcije gustine vjerovatnoće jednak 1:

$$f(x) > 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

GAUSOVA RASPODJELA

- Ako greške nastaju djelovanjem vrlo velikog broja **slučajnih** I medjusobno nezavisnih uzroka, od kojih svaki izaziva različite ali vrlo male greške, onda se mjerni rezultati rasipaju prema **Gausovoj ili normalnoj raspodjeli**. Normalna raspodjela je definisana **funkcijom gustine vjerovatnoće *f*(*x*)**:

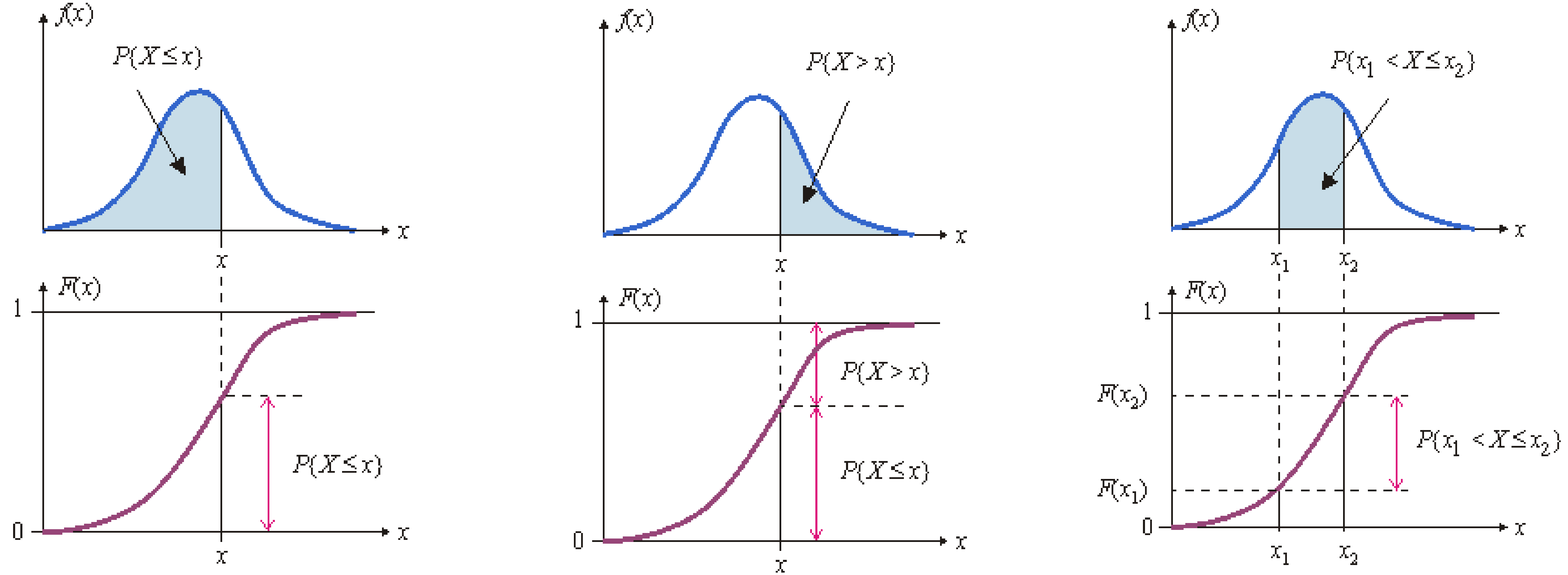
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, +\infty); \quad \mu, \sigma \in R - srednja\, vrij.\ i\ stand.dev.$$

- **Funkcija raspodjele vjerovatnoće F(*x*)** je integral funkcije gustine vjerovatnoće *f*(*x*) :

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad , \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

- Gaussova raspodjela se još naziva i **normalnom raspodjelom** $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

GAUSOVA RASPODJELA



$$F(x_a) = P(X \le x_a) = \int_{-\infty}^{x_a} f(x)dx$$

$$P(X > x_a) = 1 - F(x_a) = \int_{x_a}^{\infty} f(x)dx$$

$$P(x_a \le X \le x_b) = \int_{x_a}^{x_b} f(x)dx = F(x_b) - F(x_a)$$

http://daad.wb.tu-harburg.de/?id=271

GAUSOVA RASPODJELA

- Kriva Gausove funkcije gustine vjerovatnoće je simetrična oko srednje vrijednost µ u kojoj ima maksimum, čija je vrijednost:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu$$

$$D(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2$$

Za Gaussovu raspodjelu E(x) jednako je srednjoj vrijednosti, a varijansa je D(x).

Ako je $E(x)$=0, a $D(x)$=1, tada se normalna raspodjela zove standardna ili **normalizovana** raspodjela. Funkcija gustine vjerovatnoće je tada:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

GAUSOVA RASPODJELA

- Normalizacija Gausove funkcije vjerovatnoće je transformacija postojeće funkcije *f*(*x*) koja se izvodi uvođenjem smjene:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- Dakle, umjesto računanja Gausove funkcije gustine vjerovatnoće prema mjerenoj veličini X, ona se računa prema transformisanoj mjerenoj veličini Z.
- Funkcija gutine vjerovatnoće i raspodjele vjerovatnoće je sada data relacijom:

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}} \qquad F(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Z} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ$$

- Ovo je tzv. integral Laplasa koji se analitički ne može riješiti već se vrijednosti daju tabelarno. Grafik funkcije ovog integrala raspodjele vjerovatnoće je neparna funkcija, pa je dovoljno tablično dati vrijednosti samo za pozitivne vrijednosti x.
- Ako slučajna promjenljiva *X* ima Gausovu raspodjelu sa parametrima μ i σ, slučajna promjenljiva *Z* ima „normalizovanu“ Gausovu raspodjelu srednje vrijednosti 0 i varijanse 1.

$$X : N(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad Z : N(0,1), \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Područje pouzdanosti

- Aritmetička sredina (srednja vrijednost) pojedinačnih rezultata ponovljenih mjerenja ne mora biti jednaka stvarnoj vrijednosti mjerene veličine, čak i ako smo uklonili sve sistematske greške.
- Stoga definišemo samo područje odnosno interval unutar kojeg se može sa odabranom vjeorvatnoćom očekivati stvarna vrijednost mjerene veličine, uz pretpostavku normalne raspodjele grešaka.
- Ovo područje se naziva **područje pouzdanosti ili interval povjerenja**:

$$\bar{x} \pm k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Donja gr. pouzdanosti

$$\bar{x} + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Gornja gr. pouzdanosti

$$P = 95\%, \quad k = 1.96$$

$$P = 99\%, \quad k = 2.58$$

Zadatak 1.3. Koliko iznosi područje pouzdanosti aritmetičke sredine kod statističke sigurnosti P=95 %, ako su dobijeni sljedeći pojedinačni rezultati mjerenja: 103,2; 105,4; 107,6; 105,2; 104,4; 104,8; 103,8; 105,8; 107,2 i 105,5.

$$\bar{x} \pm k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$P = 95\%, \quad k = 1.96$$

Aritmetička sredina pojedinačnih mjerenja je:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\bar{x} = 105,29$$

Standardna devijacija pojedinačnih mjerenja je:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

$$\sigma = 1,37$$

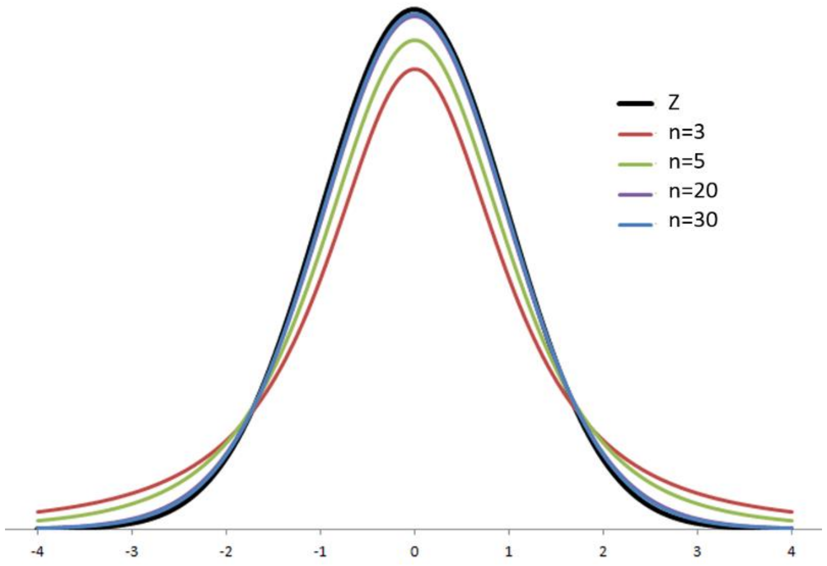
Područje pouzdanosti za P=95 % iznosi:

$$\bar{x} \pm k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 105,29 \pm 1,96\frac{1,37}{\sqrt{10}} = 105,29 \pm 0,85$$

Studentova funkcija gustine verovatnoće

- Ova raspodjela je od značaja kada se procjenjuje najvjerovatnija vrijednost μ na bazi manjeg broja ponovljenih rezultata mjerenja.
- Grafik funkcije je sličan grafiku funkcije gustine normalne raspodjele, ali zavisi od broja stepeni slobode k=N-1, gdje je N broj ponovljenih mjerenja.
- Povećanjem broja stepeni slobode, Studentova raspodjela se asimptotski približava normalnoj raspodjeli.
- Vrijednosti parametra t za tipične vjerovatnoće P i broja stepena slobode k=N-1, daju se tabelarno.
- Područje pouzdanosti za ovu raspodjelu je: $\bar{x} \pm s\frac{t}{\sqrt{n}}$
- Vrijednosti parametra $t \;\; i \;\; \frac{t}{\sqrt{n}}$ za tipične vjerovatnoće

P (68.3%; 95%; 99% i 99,73%) date su tabelarno.



Uniformna funkcija gustine verovatnoće

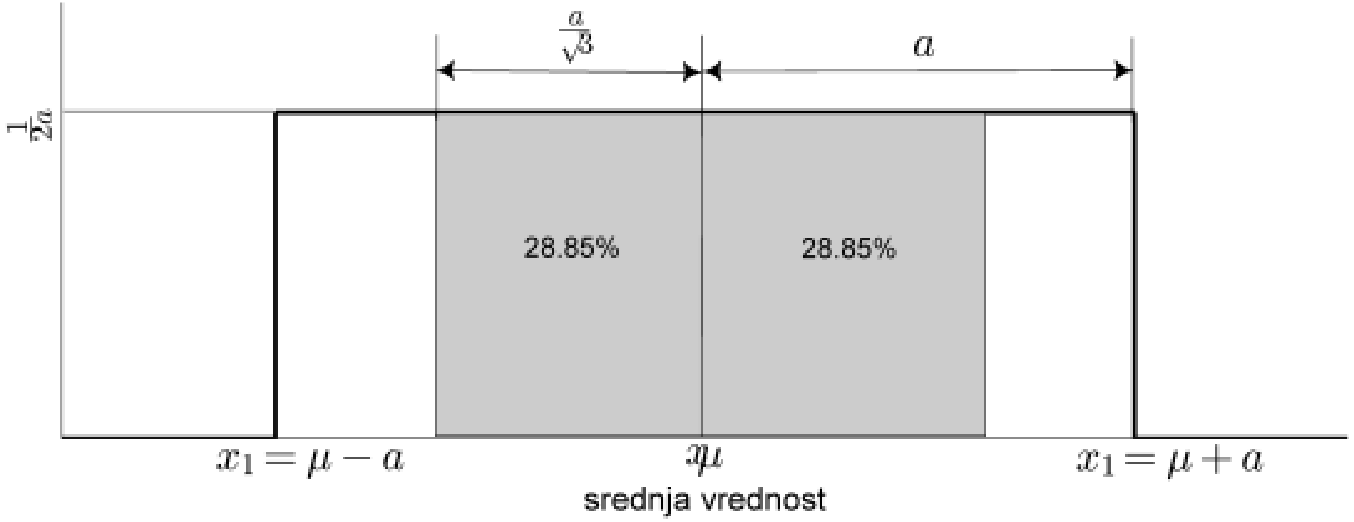
- Ako greške nastaju djelovanjem velikog broja **slučajnih** i medjusobno nezavisnih uzroka, od kojih je svaka vrijednost jednako vjerovatna, onda se mjerni rezultati rasipaju prema **Ravnomjernoj ili uniformnoj raspodjeli.**
- Funkcija gustine vjerovatnoće f(x) je:

$$f(x) = \frac{1}{2a}, \quad x_1 \le x \le x_2$$

$$f(x) = 0, \quad ostalo$$

- Standardno odstupanje za uniformnu raspodelu je jednako korjenu srednje vrijednosti kvadrata odstupanja:

$$s = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x-\mu)^2 dx} = \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2a}(x-\mu)^2 dx}$$



Uniformna funkcija gustine verovatnoće

$$s=\sqrt{\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{2a}(x-\mu)^2\,dx}=\sqrt{\int_{x_1-\mu}^{x_2-\mu}\frac{1}{2a}(x-\mu)^2\,d(x-\mu)}\underset{\left(\substack{x_1=\mu-a\\ x_2=\mu+a}\right)}{=}\sqrt{\frac{1}{2a}\frac{(x-\mu)^3}{3}\Bigg|_{-a}^{a}}$$

$$s=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

- Uniformna raspodela se primjenjuje kada nemamo dovoljno informacija o samom mjerenju.
- Na primer, ako otpornik čija je otpornost 560 kΩ ima garantovanu grešku manju od 1%, onda se pretpostavlja da mjerenje otpornosti otpornika može da ima bilo koju vrijednost na intervalu [554.4, 565.6]kΩ.
- Ako ne postoji nikakva informacija o mjerenju i raspodjeli, onda se usvaja da je raspodjela uniformna.
- Poluširina ove funkcije gustine verovatnoće iznosi *a*=5.6 kΩ, odakle se dobija da je procijenjena standardna devijacija odnosno mjerna nesigurnost tipa B jednaka je

$$s=\frac{a}{\sqrt{3}}=3.23K\Omega$$

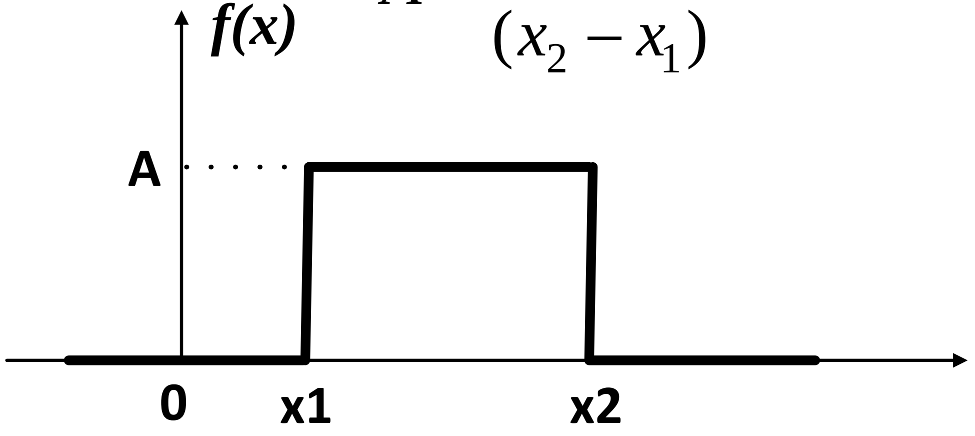
Uniformna funkcija gustine verovatnoće

- Za interval koji nije simetričan, uniformna funkcija gustine verovatnoće je jednaka:

$$f(x) = \frac{1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \le x \le x_2$$

$$f(x) = 0, \quad ostalo$$

$$A = \frac{1}{(x_2 - x_1)}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = A(x_2 - x_1) = 1$$

Matematičko očekivanje je definisano kao:

$$\mu = E(X) = \int_{x_1}^{x_2} xf(x)dx = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$D(X) = E[\left(X - E(X)\right)^2] = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$\sigma^2 = D(X) = \int_{x_1}^{x_2} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

$$\sigma^2 = \frac{\left(x_2 - x_1\right)^2}{12}$$

U intevalu (μ-σ, μ + σ) je približno 58% ishoda (mjerenja).
U intervalu $(\mu - \sqrt{3}\sigma, \mu + \sqrt{3}\sigma)$ je 100% vrijednosti.

MJERNA NESIGURNOST TIPA B, $\boldsymbol{uB}(\boldsymbol{x})$

- Procjenjuje se na osnovu znanja o mjernoj metodi i postupku mjerenja, o karakteristikama instrumenata i svim ostalim podacima (osim uračunatog kroz mjernu nesigurnost tipa A). Uglavnom se svodi na nesigurnost koja potiče od **tačnosti samih instrumenata**. Procjenjuje se na osnovu podataka koje navedu proizvođači instrumenata.
- **Analogni instrumenti – nesigurnost očitavanja**
- Na osnovu podatka o **klasi tačnosti mjernih instrumenata**, procjenjuje se **mjerna nesigurnost tipa B**. Ako specifikacijama proizvođača nije drugačije navedeno, i ako nema nikakvih dodatnih podataka, pretpostavlja se **uniformna raspodjela**. Mjerna nesigurnost se procjenjuje kao **standarnda devijacija za uniformnu raspodjelu**:

$$u_B = \sigma = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} = \frac{k_t}{100\sqrt{3}} M$$

- gdje je k_t – klasa tačnosti instrumenta, a M je mjerni opseg.

MJERNA NESIGURNOST TIPA B, $\boldsymbol{uB}(\boldsymbol{x})$

- **Digitalni instrumenti – nesigurnost očitavanja**
- Osnovni podatak koji se definiše je rezolucija koja je određena brojem cifara.
- Npr. broj cifara **3½** znači da instrument ima **3 cifre** na kojima može da se ispiše bilo koji broj od 0 do 9 i **cifru najveće težine** na kojoj može da piše 0 ili 1.
- Za instrument s brojem cifara 3½ na opsegu od 2V maksimalna vrijednost koja može da se prikaže je 1.999, **rezolucija** se određuje kao 2V/2000 tj. **opseg podijeljen s brojem stanja koje mogu da se prikažu na tom opsegu.**
- Najčešće se greška definiše kao procentualna greška δ_1 u odnosu na očitanu vrijednost X plus procentualna greška δ_2 opsega *M* na kome se mjeri:

$$\Delta x = \frac{\delta_1}{100} X + \frac{\delta_2}{100} M$$

$$\Delta x = \frac{\delta_1}{100} X + NR$$

gdje je N – broj cifara najmanje težine,
a R je rezolucija instrumenta.

MJERNA NESIGURNOST TIPA B, $\boldsymbol{uB}(\boldsymbol{x})$

- Kod digitalnih uređaja, vrijednosti posljednje cifre su jednako vjerovatne, tako da se koristi uniformna (ravnomjerna) raspodjela vjerovatnoće. Mjerna nesigurnost se računa kao:

$$u_B = \sigma = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}$$

KOMBINOVANA MJERNA NESIGURNOST

- Kada su poznate mjerne nesigurnosti tipa A i tipa B, **ukupna odnosno kombinovana mjerna nesigurnost** u slučaju nekorelisanih veličina se dobija kao:

$$u(\bar{x}) = \sqrt{{u_A}^2(\bar{x}) + {u_B}^2(\bar{x})}$$

- Nesigurnost mjerenja se može dati u obliku **Proširene nesigurnosti, U=k·u(x)**, k-numerički faktor pokrivanja (proširenja), specificirane vrijednosti 1,2 i 3 za nivoe povjerenja (vjerovatnoću) 68%, 95,5% i 99,7% ;